VARIABLE ALEATOIRE

Définition :

Soit l'univers $\Omega = \{e_1; e_2; e_3; \dots; e_i; \dots; e_n\}$

Définir une Variable Aléatoire X revient à associer à chaque valeur e_i de Ω, une valeur réelle x_i.

On obtient alors $X \in \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$

Exemple 1 :

On lance une pièce de monnaie.
Si elle tombe sur Pile, on gagne 2€, si elle tombe sur face, on perd 3€.
X est la variable aléatoire associé au gain algébrique du jeu.

→ L'ensemble des valeurs de X est donc $X \in \{-3; 2\}$

Exemple 2 :

On lance 5 fois un dé équilibré à 6 faces, numérotées de 1 à 6.
X est la variable aléatoire comptant le nombre de fois que 2 apparaît.

→ L'ensemble des valeurs possibles de $X \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

Loi de Probabilité

Définir une loi de probabilité

Associer à chaque valeur x_i de X la probabilité de e_i : $p(e_i) = p(X = x_i) = p_i$

$X = x_i$	x_1	x_2	…	x_n
$p_i = p(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Remarque : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Espérance, Variance, Écart-Type

Espérance : *Valeur moyenne de X, Gain moyen…*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i$$

Variance : *moyenne des écarts au carré :*

$$V(X) = \sum_{i=0}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 p_i = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

Écart-Type : *dispersion autour de l'espérance :* $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple :

On donne ci-dessous la loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

X=xi	1	2	3	4	5	10
P(X=xi)	0,16	0,15	0,2	0,25	0,18	0,06

Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{6} x_i p_i = 1 \times 0{,}16 + 2 \times 0{,}15 + 3 \times 0{,}2 + 4 \times 0{,}25 + 5 \times 0{,}18 + 10 \times 0{,}06 = 3{,}56$$

$$V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = 1^2 \times 0{,}16 + 2^2 \times 0{,}15 + 3^2 \times 0{,}2 + 4^2 \times 0{,}25 + 5^2 \times 0{,}18 + 10^2 \times 0{,}06 - 3{,}56^2 \approx 4{,}39$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2{,}09$$