DÉRIVATION – FORMULES DE COURS

Dérivée d'une fonction usuelle

Fonction	Dérivée	D f	D f '
k $(constante)$	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^3	$3x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Opérations sur la dérivée

Type d'opération	***Formule de dérivée***
Multiplication par un scalaire	$(ku)' = k * u'$
Somme de fonctions	$(u+v)' = u' + v'$
Produit de fonctions	$(uv)' = u'v + uv'$
Inverse d'une fonction	$\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
Quotient de fonctions	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Racine d'une fonction	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
Puissance d'une fonction	$(u^n)' = nu'u^{n-1}$
cosinus d'une fonction	$(\cos u)' = -u' \sin u$
sinus d'une fonction	$(\sin u)' = u' \cos u$
Composition d'une fonction affine	$\left(f(ax+b)\right)' = a * f(ax+b)$

Calculer une dérivée

Dérivée de la forme $k \times u$:

$$(\boldsymbol{ku})' = \boldsymbol{k * u'}$$

Exemple : $f(x) = 7x^4 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$k = 7$ *et* $u(x) = x^4$

$$f'(x) = 7 \times 4x^3 = 28x^3$$

Dérivée d'un inverse $\frac{1}{v}$:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Exemple : $f(x) = \frac{1}{2x^4+3}$ *sur* $\mathbb{R}$

$v(x) = 2x^4 + 3.$

$$f'(x) = \frac{-8x^3}{(2x^4+3)^2}$$

Dérivée d'une somme $u + v$:

$$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})' = \boldsymbol{u'} + \boldsymbol{v'}$$

Exemple : $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt{x} - 1 \ \forall x > 0$

$u(x) = 3x^2$, $v(x) = 2\sqrt{x}$, $w(x) = -1.$

$$f'(x) = 6x + \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{6x \times \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \frac{6x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}}$$

Dérivée de la forme $\frac{k}{u}$:

$$\left(\frac{k}{v}\right)' = -k\frac{v'}{v^2}$$

Exemple : $f(x) = \frac{-5}{x^2+2}$ *sur* $\mathbb{R}$

$v(x) = x^2 + 2$ *et* $k = -5.$

$$g'(x) = -5 \times \frac{-2x}{(x^2+2)^2} = \frac{10x}{(x^2+2)^2}$$

Dérivée d'un produit $u \times v$:

$$(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}$$

Exemple : $f(x) = 2x\sqrt{x}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$

$u(x) = 2x$ *et* $v(x) = \sqrt{x}.$

$$f'(x) = 2 \times \sqrt{x} + 2x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{4x + 2x}{2\sqrt{x}} = \frac{6x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x}{\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{3x\sqrt{x}}{x} = 3\sqrt{x}$$

Dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple : $f(x) = \frac{2x-1}{3x^2+2}$ *sur* $\mathbb{R}$

$u(x) = 2x - 1$ *et* $v(x) = 3x^2 + 2$

$$f'(x) = \frac{2(3x^2+2) - (2x-1)6x}{(3x^2+2)^2}$$

$$= \frac{6x^2 + 4 - (12x^2 - 6x)}{(3x^2+2)^2} = \frac{-6x^2 + 6x + 4}{(3x^2+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(-3x^2 + 3x + 2)}{(3x^2+2)^2}$$

Déterminer une équation réduite de tangente

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Déterminer l'équation de la tangente en $x = 2$.

Réponse :

L'équation réduire est : $y = f'(2)(x-2) + f(2)$. On a $f(2) = 4$.

On calcul, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{2(x-1)-2x\times 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$. Donc $f'(2) = -2$.

On obtient pour équation : $y = -2(x-2) + 4 = -2x + 8$

ÉQUATION DE LA TANGENTE :

Soit f une fonction définie et dérivable en $x = a$

L'équation réduite de la tangente en $x = a$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Déterminer une équation réduite de tangente sous condition :

Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^2-7x+10}{x-1}$

On admet que $f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$

Déterminer une équation réduite de tangente parallèle à une droite

Déterminer, si elles existent, les tangentes à C_f , parallèles à la droite d'équation $y = 2x + 3$

Réponse :

Si deux droites sont parallèles → elles ont le même coefficient directeur. On cherche des tangentes dont le coefficient directeur vaut 2.

Or, coef directeur tangente = nombre dérivé.

Les abscisses des tangentes sont donc solution de $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 2(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = 0$.

Or $\Delta = -16 < 0$, il n'existe pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Conclusion : Il n'existe pas de tangente à C_f parallèle à la droite d'équation $y = 2x + 3$

Déterminer une équation réduite de tangente passant par un point

Déterminer s'il existe des tangentes à C_f passant par le point $A(1;7)$.

Réponse :

$\forall a \neq 1$, l'équation déduite de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Si elle passe par $A(1;7)$ alors a est solution de :

$$7 = f'(a)(1-a) + f(a) \Leftrightarrow 7 = \frac{(a-3)(a+1)}{(a-1)^2}(1-a) + \frac{a^2-7a+10}{a-1}$$

$$\Leftrightarrow 7 = -1 \times \frac{a^2-2a-3}{a-1} + \frac{x^2-7x+10}{x-1} \Leftrightarrow 12a = 20 \Leftrightarrow a = \frac{5}{3}$$

Conclusion : Il existe une unique tangente à C_f passant par le point $A(1;7)$, la tangente au point d'abscisse $a = \frac{5}{3}$.