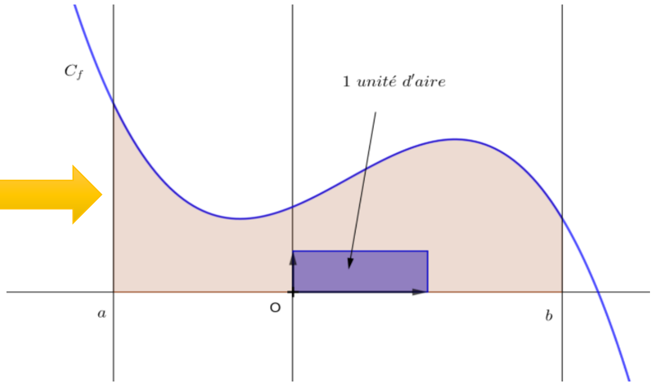
CALCUL INTÉGRAL

Interprétation géométrique :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Représente l'aire du domaine

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



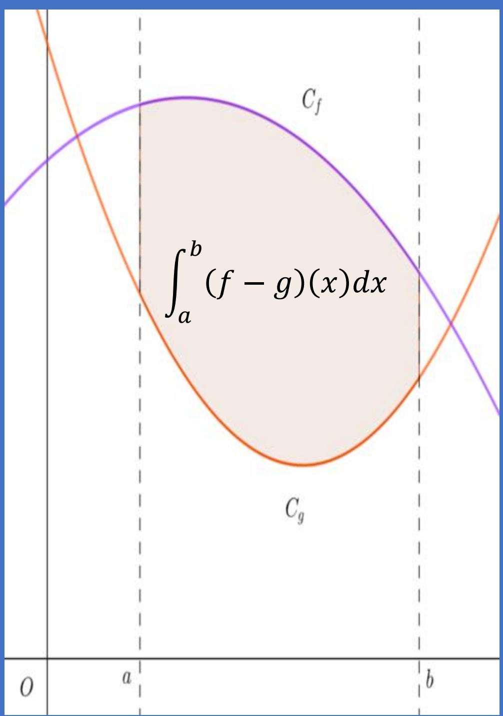
Linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Calcul d'une Intégrale :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Aire entre 2 courbes :



Propriétés de l'intégrale :

f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, et $a, b \in I$.

--- Positivité ---

Si $f(x) \geq 0$ sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

--- Intégrale et relation d'ordre (inégalité) ---
croissance de l'intégrale

Si $f(x) \geq g(x)$ sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

--- Inégalité de la moyenne ---

Si $\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$, alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Intégration Par Parties

Formule :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

Méthode de Calcul :

$u(x)$ | $u('x)$

$\int u(x)\,v'(x)dx$ = $[u(x)v(x)]$ − $\int u'(x)\,v(x)dx$

$v'(x)$ | $v(x)$

Intérêt

L'IPP est une méthode de calcul d'intégrales de fonctions pouvant s'écrire sous la forme $u \times v'$

Exemple : Calculer

$$I_1 = \int_0^2 xe^{-x}\,dx$$

$u(x) = x$ | $u('x) = 1$

$I_1 = \int_0^2 xe^{-x}\,dx$ = $[-xe^{-x}]_0^2$ − $\int_0^2 -e^{-x}dx$

$v'(x) = e^{-x}$ | $v(x) = -e^{-x}$

$$\Rightarrow I_1 = [-xe^{-x}]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x}dx = -2e^{-2} - 0 - [e^{-x}]_0^2 = -\frac{2}{e^2} - (e^{-2} - e^0) = 1 - \frac{3}{e^2}$$

Primitive de $x \to \ln x$:

$$\int \ln x\,dx$$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ $donc$ $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$

$$\int^x \ln t\,dt = [t\ln t]^x - \int^x 1dt = x\ln x - [t]^x = x\ln x - x$$

$\forall x > 0$, une primitive de $f(x) = \ln x$ est :

$F(x) = x\ln x - x$