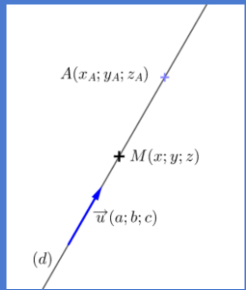
Représentation Paramétrique de Droite



(d) est définie par :

- 1 vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$
- 1 point A

$M \in (d)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{R}$ tq $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$.

Représentation paramétrique de (d) : $\begin{cases} x = ak + x_A \\ y = bk + y_A \\ z = ck + z_A \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Méthode

A : Comment montrer qu'un point appartient ou pas à une droite (d) ?

On remplace les x, y, z de la rep param par les coordonnées du point

- *Si on trouve 3 fois la même valeur de k : Le point $\in (d)$*
- *Sinon le point n'est pas sur la droite.*

Application

$C(4; -5; 7) \in (d)$:

Vérifions s'il existe k solution de $\begin{cases} 4 = k + 2 \\ -5 = -2k - 1 \\ 7 = 3k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \\ k = 2 \end{cases}$, donc $C \in (d)$

Application

$D(-1; 0; 4) \notin (d)$:

Montrons qu'il n'existe pas de k solution de $\begin{cases} -1 = k + 2 \\ 0 = -2k - 1 \\ 4 = 3k + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \\ k = -1/2 \\ k = 1 \end{cases}$, les 3 valeurs sont différentes, $D \notin (d)$

Bases de Cours

1. Déterminer 1 représentation paramétrique de (d), dirigée par $\vec{u}(1; -2; 3)$, passant par $A(2; -1; 1)$:

(d) : $\begin{cases} x = k + 2 \\ y = -2k - 1 \\ z = 3k + 1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

2. Déterminer 1 représentation paramétrique de (EF) avec $E(1; 5; 0)$, $F(3; 1; 1)$:

(EF) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tq $\overrightarrow{EM} = t \times \overrightarrow{EF}$, $t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est 1 vecteur directeur et E 1 point (F marche aussi)

D'où : $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -4t + 5 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Éléments Caractéristiques :

Soit (D) $\begin{cases} x = -2l + 2 \\ y = 4l - 9 \\ z = -6l - 2 \end{cases}, l \in \mathbb{R}$.

Donner 1 vecteur directeur, 1 point :

Vecteur directeur : $\vec{v}(-2; 4; -6)$

Point : $G(2; -9; -2)$

Méthode

B : Comment étudier la position relative entre 2 droites ?

1. Les vecteurs directeurs sont-ils colinéaires ?

$\begin{cases} \textbf{oui} \rightarrow \textit{vérifions si elles sont confondues ou strictement//} \\ \textbf{non} \rightarrow \textit{elles sont soit sécantes soit non coplanaires} \end{cases}$

2. a) Si les vecteurs sont colinéaires : **Ont-elles 1 point commun ?**

→Voir Méthode A $\begin{cases} \textbf{oui} : \textit{CONFONDUES} \\ \textbf{non} : \textit{STRICTEMENT PARALLELLES} \end{cases}$

b) Si les vecteurs ne sont pas colinéaires :

→ On résout le système d'égalité des 2 représentations paramétriques.

Ce système admet-il des solutions ? $\begin{cases} \textbf{oui} : \textit{SECANTES} \\ \textbf{non} : \textit{NON COPLANAIRES} \end{cases}$

Application

Position relative : Ex1 → Droites Parallèles

Étude de la position relative entre (d) et (D) :

1. Vecteurs directeurs : $\vec{u}_d(1; -2; 3)$ et $\vec{u}_D(-2; 4; -6)$

$-2\,\vec{u}_d = \vec{u}_D$ → les vecteurs sont colinéaires donc (d) et (D) sont soit confondues soit strictement parallèles.

2. On vérifie si un point de (d) appartient à (D) :

Pour $k = 0$, on a $A(2; -1; 1)$. Vérifions si $A \in (D)$:

$\begin{cases} 2 = -2l + 2 \\ -1 = 4l - 9 \\ 1 = -6l - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} l = 0 \\ l = 2 \\ l = -\frac{1}{2} \end{cases}$ → Système incompatible

$A \notin (D)$, donc (d) et (D) sont strictement parallèles.

Application

Position relative : Ex2 : Droites sécantes ou non coplanaires.

Étudier la position relative entre (d) et (EF) :

1. Vecteurs directeurs : $\vec{u}_d(1; -2; 3)$ et $\overrightarrow{EF}(2; -4; 1)$

On a $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-4} \neq \frac{3}{1}$ → vecteurs non colinéaires donc (d) et (EF) sécantes ou non coplanaires.

2. Vérifions s'il existe $(k, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ solution de :

$\begin{cases} k + 2 = 2t + 1 \\ -2k - 1 = -4t + 5 \\ 3k + 1 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k + 2 = 2(3k + 1) + 1 \\ -2k - 1 = -4(3k + 1) + 5 \\ t = 3k + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{5} \\ k = \frac{1}{5} \\ t = 3k + 1 \end{cases}$ → Système incompatible

Le système n'admet pas de solution, (d) et (EF) sont non coplanaires.

Le Plan P est défini par $\begin{cases} \vec{n}(a;b;c) : 1 \text{ vecteur normal} \\ A : 1 \text{ point} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ***Équation cartésienne de P :***

$$ax + by + cz + d = 0$$

La Droite d est définie par $\begin{cases} \vec{u}(\alpha;\beta;\gamma) : 1 \text{ vecteur directeur} \\ B : 1 \text{ point} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ***Représentation paramétrique de d :***

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_B \\ y = \beta t + y_B \\ z = \gamma t + z_B \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Méthode générale pour étudier la position relative entre le plan P et la droite d :

On calcule $\vec{n}.\vec{u}$

$$\vec{n}.\vec{u} = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma$$

$\vec{n}.\vec{u} = 0$?

Oui $\Rightarrow$ *P* et *d* sont soit :

- **Strictement parallèles**
- **Soit *d* est incluse dans *P***

On vérifie si $B \in P$:

$ax_B + by_B + cz_B + d = 0$?

Oui $\Rightarrow$ *d* est incluse dans *P*

Non $\Rightarrow$ *d* et *P* sont strictement parallèles

Non $\Rightarrow$ *P* et *d* sont sécants selon 1 point dont les coordonnées sont solution de :

$$\begin{cases} x = \alpha t + x_B \\ y = \beta t + y_B \\ z = \gamma t + z_B \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$$

Comment déterminer les coordonnées de ce point ?

On substitue les x, y, z de la $4^{\text{ème}}$ ligne par les expressions des 3 premières, on résout :

$$a(\alpha t + x_B) + b(\beta t + y_B) + c(\gamma t + z_B) + d = 0$$

$\Rightarrow$ On obtient la valeur de t solution.

$\Rightarrow$ On remplace la valeur t obtenue dans la représentation paramétrique de d.

Le Plan P est défini par $\begin{cases} \vec{n}(a;b;c) : 1 \textit{ vecteur normal} \\ A : 1 \textit{ point} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ***Équation cartésienne de P :***

$ax + by + cz + d = 0$

Problème posé :

La Droite d est PERPENDICULAIRE à P et passe par B

$\Rightarrow$ ***Déterminer sa représentation paramétrique :***

Méthode pour déterminer 1 représentation paramétrique de d perpendiculaire à P :

d est perpendiculaire à P

$\Rightarrow$ **$\vec{n}$, vecteur normal de P est aussi 1 vecteur directeur de d**

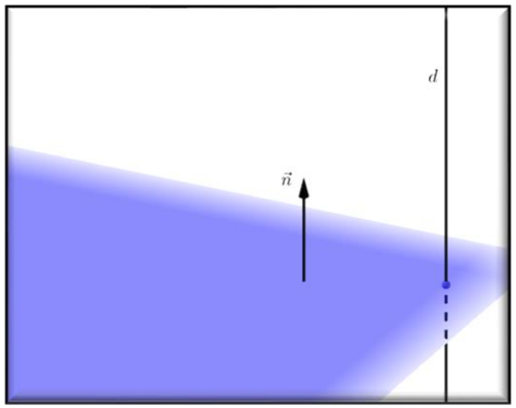
La Droite d est définie par $\begin{cases} \vec{n}(a;b;c) : 1 \textit{ vecteur directeur} \\ B : 1 \textit{ point} \end{cases}$

$\Rightarrow$ ***Représentation paramétrique de d :***

$$\begin{cases} x = at + x_B \\ y = bt + y_B \\ z = ct + z_B \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exemple :

P est le plan d'équation cartésienne $x - 2y + z - 3 = 0$.
Déterminer une représentation paramétrique de d, perpendiculaire à P, passant par $B(0;1;-2)$.



Réponse :

Un vecteur normal de P est $\vec{n}(1;-2;1)$.
d et P sont perpendiculaire $\Rightarrow \vec{n}$ est un vecteur directeur de d.
d est donc l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $\overrightarrow{BM} = t \times \vec{n}, t \in \mathbb{R}$.

On obtient : d: $\begin{cases} x = t \\ y = -2t + 1 \\ z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$