COMPOSITION

Définition :

f, g définie sur D_f et D_g.

$\forall x$ tel que $g(D_f) \subset D_f$ ***la composée de g par f*****,** ***notée f o g*** (se lite f « rond » g) est définie par

$$(f \ o \ g)(x) = f(g(x))$$

⚠ **L'opérateur *o* n'est pas commutatif.** $f \ o \ g \ \neq g \ o \ f$

$\forall x \in D_f, (g \ o \ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-x} + 5 \neq (f \ o \ g)(x) = \sqrt{-x-4}$

Exemple :

$f(x) = \sqrt{1-x}$ et $g(x) = x + 5$, définies sur $D_f =]-\infty\,; 1]$ et $D_g = \mathbb{R}$.

fog existe ssi $g(x) \subset D_f \Leftrightarrow x + 5 \leq 1 \Leftrightarrow x \leq -4$

$\forall x \in]-\infty\,; -4]\,, (f \ o \ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-(x+5)} = \sqrt{-x-4}$

Variations de la fonction composée :

- Si f et g ont les mêmes variations $\Rightarrow fog$ est croissante
- Si f et g ont des variations contraires $\Rightarrow fog$ est décroissante

Exemple :

Soit f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} = e^x \ o \ (-x^2)$

$u(x) = e^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$

- $v(x) = -x^2$ croissante sue $\mathbb{R}_- \Rightarrow u$ et v mêmes var donc uov croissante
- $v(x) = -x^2$ décroissante sue $\mathbb{R}_+ \Rightarrow u$ et v var contraires donc uov décroissante

---

Dérivée d'une fonction composée :

$$(v \ o \ u)' = u' \times v' o \ u$$

Nouvelles formules de dérivées

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sin u)' = u' \cos \ u$
$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$(e^u)' = u'e^u$
$(\cos u)' = \ -u' \sin \ u$	$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

Fonctions réciproques :

f et g sont 2 fonction réciproques ssi f, g sont monotones et

- $\forall x$ tq $g(x) \subset D_f : (fog)(x) = x$
- $\forall x$ tq $f(x) \subset D_g : (gof)(x) = x$

$x \to \cos x \ , x \in [0; \pi]$ et $x \to \arccos x \ , x \in [-1; 1]$

$x \to \sin x \ , x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ et $x \to \arcsin x \ , x \in [-1; 1]$

$x \to e^x \ , x \in \mathbb{R}$ et $x \to \ln x \ , x \in]0; +\infty[$

$x \to x^2, x \in [0; +\infty[$ et $x \to \sqrt{x} \ , x \in [0; +\infty[$ …

CONVEXITÉ

Dérivée seconde :

Soit f, 2 fois dérivable sur I : $\forall x \in I, f''(x) = \big(f'(x)\big)$

Définition :

f est une fonction définie, continue et 2 fois dérivable sur I

f est convexe sur I ssi $\begin{cases} C_f \text{ est au-dessus de ses tangentes} \\ f' \text{ est croissante} \\ f''(x) \geq 0 \end{cases}$

f est concave sur I ssi $\begin{cases} C_f \text{ est en-dessous de ses tangentes} \\ f' \text{ est décroissante} \\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$

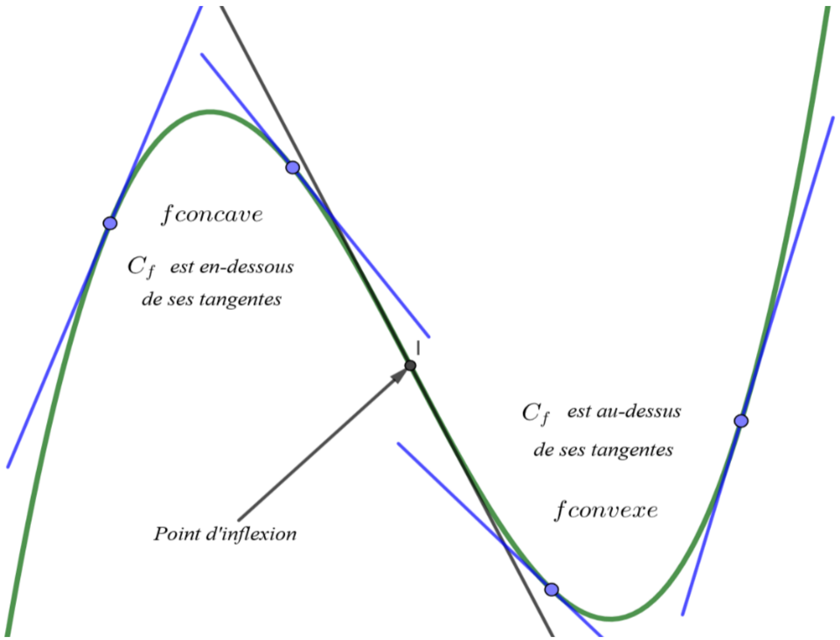
Exemples :

$x \to x^2$

$x \to e^x$

$x \to x^3, x \geq 0$

$x \to \dfrac{1}{x}, x > 0$



Exemples :

$x \to \sqrt{x}$

$x \to \ln x$

$x \to x^3, x \leq 0$

$x \to \dfrac{1}{x}, x < 0$

Point d'inflexion :

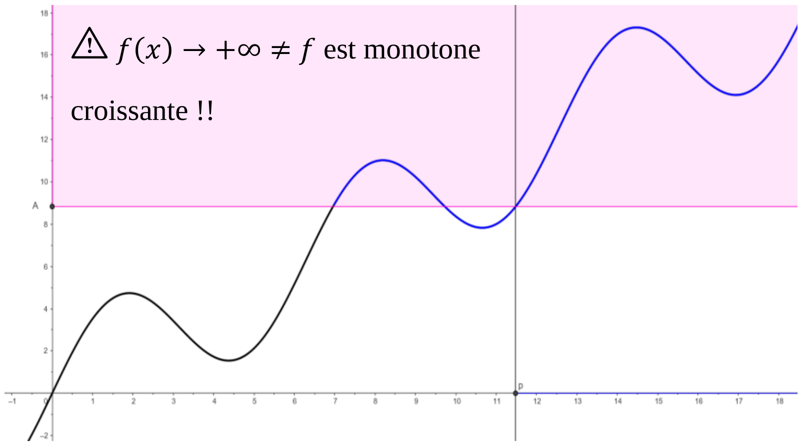
f est une fonction définie, continue et 2 fois dérivable en $x = a$

C_f admet 1 point d'inflexion en $x = a$ ssi :

$\begin{cases} \text{la tangente en } x = a \text{ traverse } C_f \text{ en } x = a \\ f' \text{ change de variation en } x = a \\ f''(x) \text{ s'annule ET change de signe en } x = a \end{cases}$

Limite ∞ en l'∞

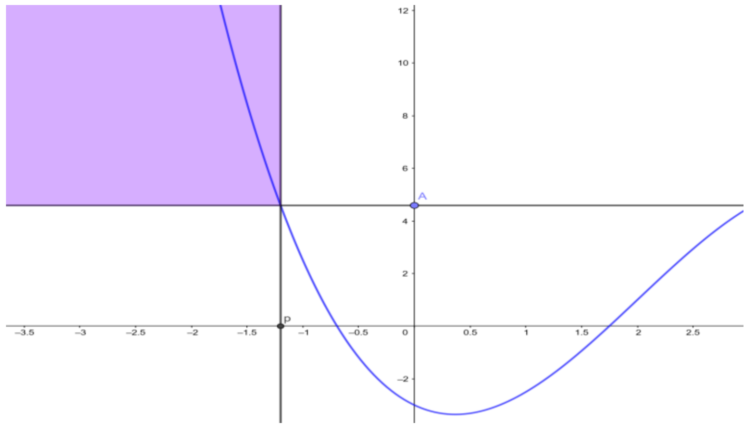
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$



$$\forall A > 0, \exists p \in \mathbb{R}, tq\ \forall x > p, f(x) > A$$

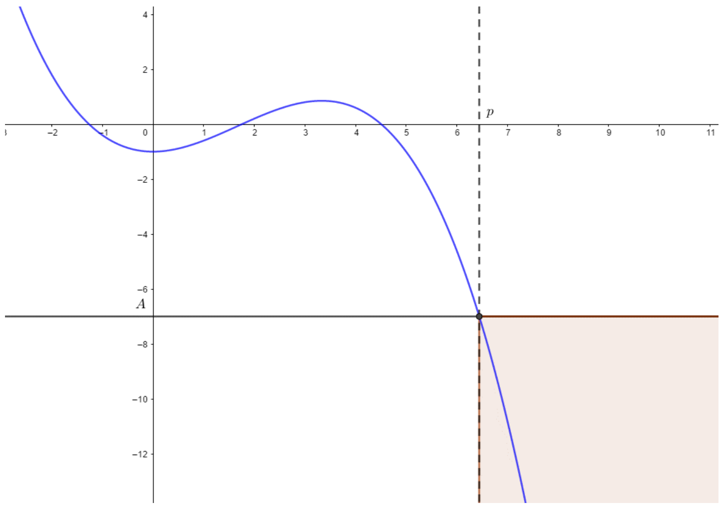
« On ne peut pas la majorer »

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$



$$\forall A > 0, \exists p \in \mathbb{R}, tq\ \forall x < p, f(x) > A$$

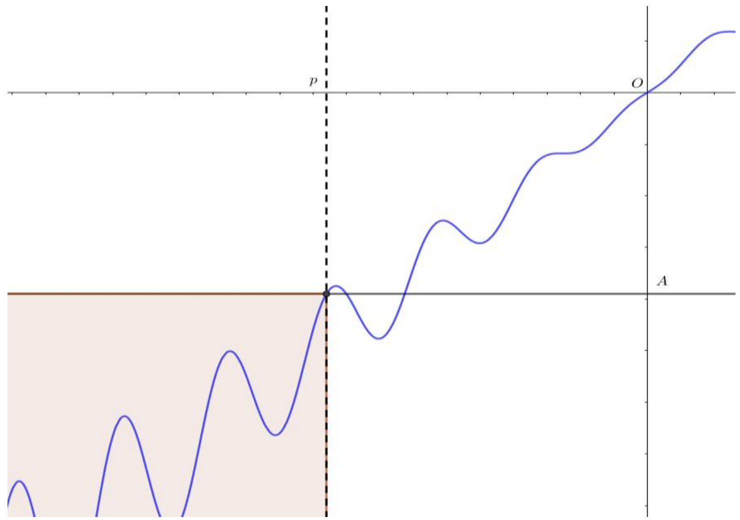
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$



$$\forall A < 0, \exists p \in \mathbb{R}, tq\ \forall x > p, f(x) < A$$

« On ne peut pas la minorer »

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

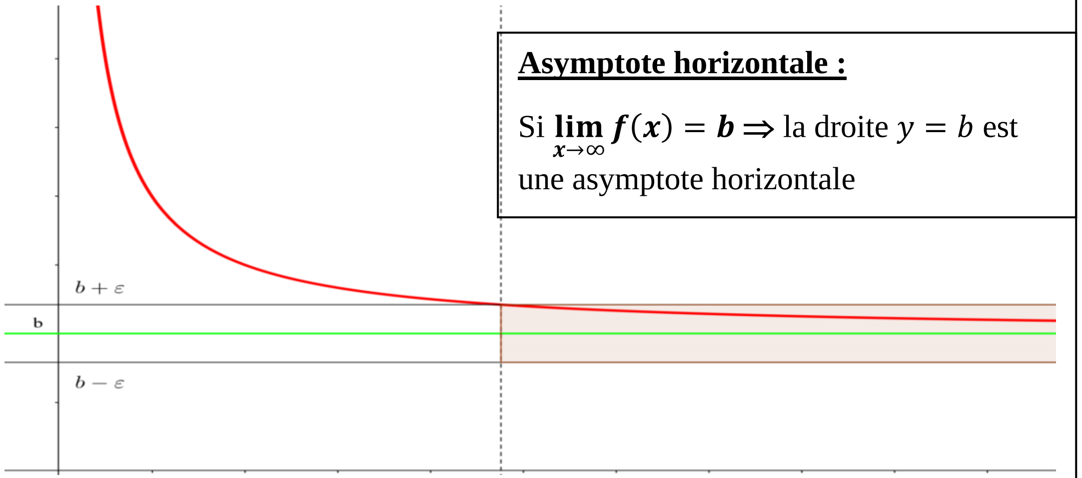


$$\forall A < 0, \exists p \in \mathbb{R}, tq\ \forall x < p, f(x) < A$$

Limite finie en l'∞

$$\lim_{x\to\infty} \boldsymbol{f(x) = b}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, p \in \mathbb{R}\; tq\; \forall x > p, f(x) \in]b-\varepsilon\,; b+\varepsilon[$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\, p \in \mathbb{R}\; tq\; \forall x < p, f(x) \in]b-\varepsilon\,; b+\varepsilon[$



Asymptote horizontale :

Si $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{f(x) = b} \Rightarrow$ la droite $y = b$ est une asymptote horizontale

VOCABULAIRE

Convergence :

f ou (u_n) ***converge*** ssi elle tend vers une limite finie.

Divergence :

f ou (u_n) ***diverge*** ssi elle ne converge pas

⚠ ***diverger ≠ tendre vers l'∞***

$$Diverger \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty \\ ou \\ f\ n'a\ pas\ de\ limite \end{cases}$$

Limites des fonctions de référence :

Fonction de référence	$\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)$	$\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)$
$ax+b\ (a>0)$	$+\infty$	$-\infty$
$ax+b\ (a<0)$	$-\infty$	$+\infty$
x^2	$+\infty$	$+\infty$
x^3	$+\infty$	$-\infty$
x^α (*où α est un entier pair*)	$+\infty$	$+\infty$
x^α (*où α est un entier impair*)	$+\infty$	$-\infty$
$\frac{1}{x}$	0^+	0^-
$\frac{1}{x^2}$	0^+	0^+
$\frac{1}{x^\alpha}$ (*où α un entier* > 0)	0^+	0^+ *si α pair* 0^- *si α impair*
$\sqrt{x}$	$+\infty$	*non définie*
e^x	$+\infty$	0^+

Fonction exponentielle et Croissances Comparées :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

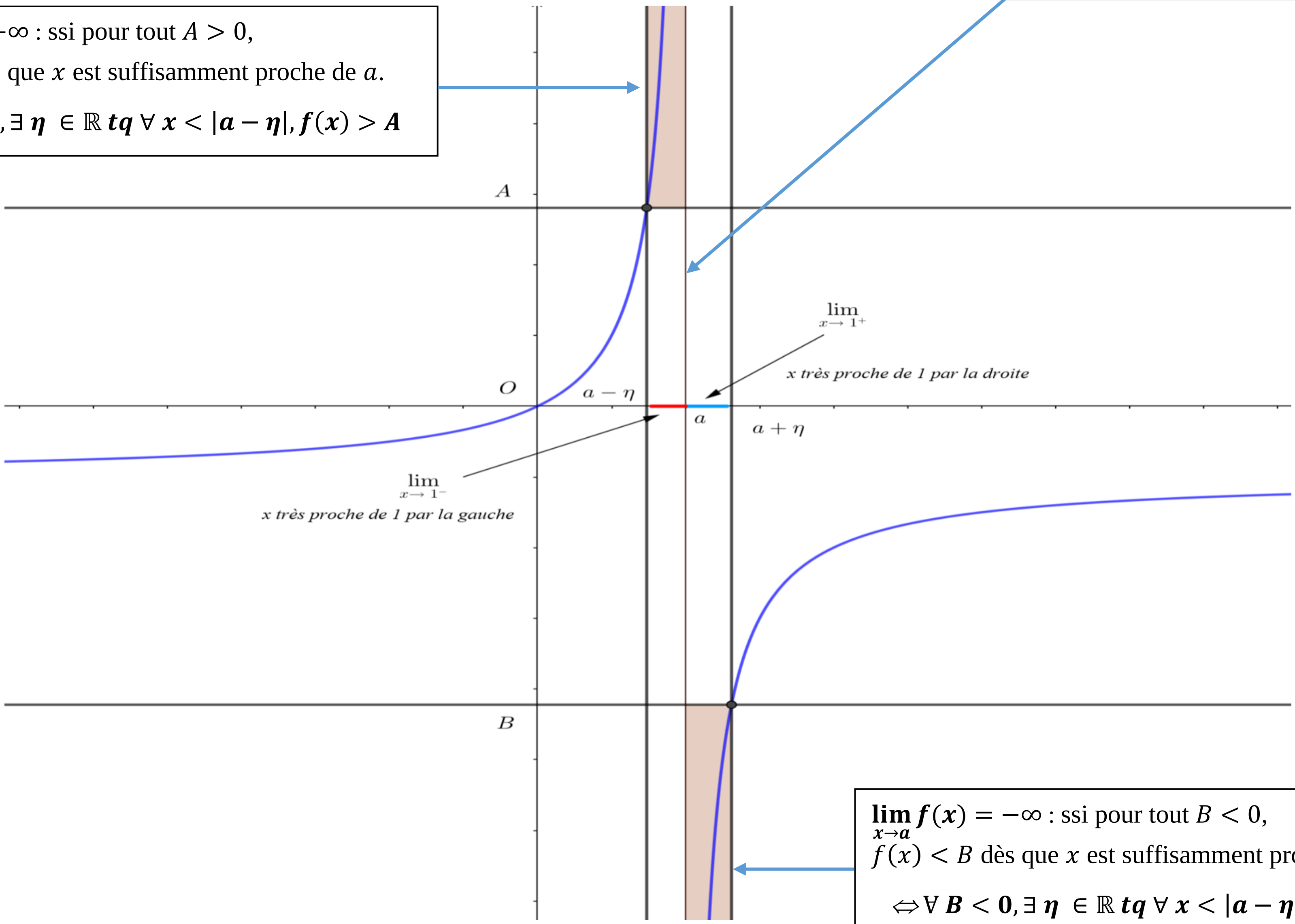
Limite ∞ en $x = a$

Asymptote verticale :

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty \Rightarrow$ la droite $x = a$ est une asymptote verticale

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$: ssi pour tout $A > 0$, $f(x) > A$ dès que x est suffisamment proche de a.

$$\Leftrightarrow \forall\, A > 0, \exists\, \eta \in \mathbb{R}\ tq\ \forall\, x < |a - \eta|, f(x) > A$$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$: ssi pour tout $B < 0$, $f(x) < B$ dès que x est suffisamment proche de a.

$$\Leftrightarrow \forall\, B < 0, \exists\, \eta \in \mathbb{R}\ tq\ \forall\, x < |a - \eta|, f(x) < B$$

Opérations sur les limites

Les 4 Formes Indéterminées (FI) :

$$\infty - \infty \ ; \ \frac{\infty}{\infty} \ ; \ 0 \times \infty \ ; \ \frac{0}{0}$$

Somme :

Limite de f	*l*	*l*	*l*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	*l'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(f+g)$	*l+l'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*

Produit :

Limite de f	*l*	*l>0*	*l>0*	*l<0*	*l<0*	$+\infty$	$-\infty$	*0*
Limite de g	*l'*	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
Limite de $f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*FI*

Quotient :

Limite type « $\frac{l}{0}$ »

Limite de f	*l*	*l>0* *ou* $+\infty$	*l>0* *ou* $+\infty$	*l<0* *ou* $-\infty$	*l<0* *ou* $-\infty$	*0*	*L*	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Limite de g	*l'≠0*	0^+	0^-	0^+	0^-	*0*	$\pm\infty$	*l'>0*	*l'<0*	*l'>0*	*l'<0*	$\pm\infty$
Limite de $f \div g$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*	*0*	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*FI*

Limite type $\frac{l}{0}$: Exemple

$$u(x) = \frac{-x}{x-1}, \text{ définie sur } \mathbb{R} - \{1\}$$

Limite en $x = a = 1$.

Comment déterminer si $x - 1 \to 0^+ \ ou \ 0^-$?

On fait le tableau de signes de $x - 1$:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	0	$+$

$\Rightarrow$ à gauche de 1 : 0^- et à droite de 1 :0^+

Limite à gauche de 1 : en 1^-

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} -x = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0^- \end{array}\right\}$$

Par quotient :

$$\lim_{x \to 1^-} u(x) = +\infty$$

Limite à droite de 1 : en 1^+

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^+} -x = -1 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+ \end{array}\right\}$$

Par quotient :

$$\lim_{x \to 1^+} u(x) = -\infty$$

On pourrait conclure que la droite $x = a$ est une *asymptote verticale*.

Théorèmes de comparaison et d'encadrement

On considère 3 fonctions f, g, h, définies au minium sur $]a\ ;\ +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$

Théorèmes de comparaison :

- ***Si, $\forall x \geq p$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.***
- ***Si, $\forall x \geq p$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.***

Théorème d'encadrement (Théorème des gendarmes) :

- ***Si $\forall x \geq p$, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$***

Valables en $-\infty$ si les fonctions sont définies.

Exemple 1 :

Limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n - \sin(n+2)$$

$\forall\ n\ \in \mathbb{N},\ -1 \leq \sin(n+2) \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin(n+2) \geq -1$$

$$\Leftrightarrow n+1 \geq \underbrace{n - \sin(n+2) \geq n-1}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n-1$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n-1 = +\infty$

D'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 2 :

Limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \cos 2n - n^2$$

$\forall\ n\ \in \mathbb{N},\ -1 \leq \cos 2n \leq 1$

$$\Leftrightarrow -1-n^2 \leq \cos 2n - n^2 \leq 1-n^2$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1-n^2$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-n^2 = -\infty$

D'après le théorème de comparaison,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Exemple 3 :

Limite de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{2-\cos n^2}{n}$$

$\forall\ n\ \in \mathbb{N},\ -1 \leq \cos n^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\cos n^2 \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 2-\cos n^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{n} \geq \frac{2-\cos n^2}{n} \geq \frac{1}{n}$$

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{3}{n}$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Limite d'une Fonction Composée & Théorème du Point Fixe

Comment déterminer $\lim\limits_{x \to a}(f o g)(x)$?

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x \to a} g(x) = b \\ \text{Et } \lim\limits_{X \to b} f(X) = c \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{Alors,} \\ \lim\limits_{x \to a} f\big(g(x)\big) = c \end{array}$$

Exemple 1 : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+1}$

$f(x) = e^{-x^2+1}$ est le composée de $x \to -x^2 + 1$ dans $x \to e^x$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 1 = -\infty$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^X = 0$.

Donc par composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x^2+1} = 0$.

Exemple 2 : $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin(\frac{\pi x - 1}{3x+1})$

$f(x)$ est la composée de $x \to \frac{\pi x - 1}{3x+1}$ dans $x \to \sin x$.

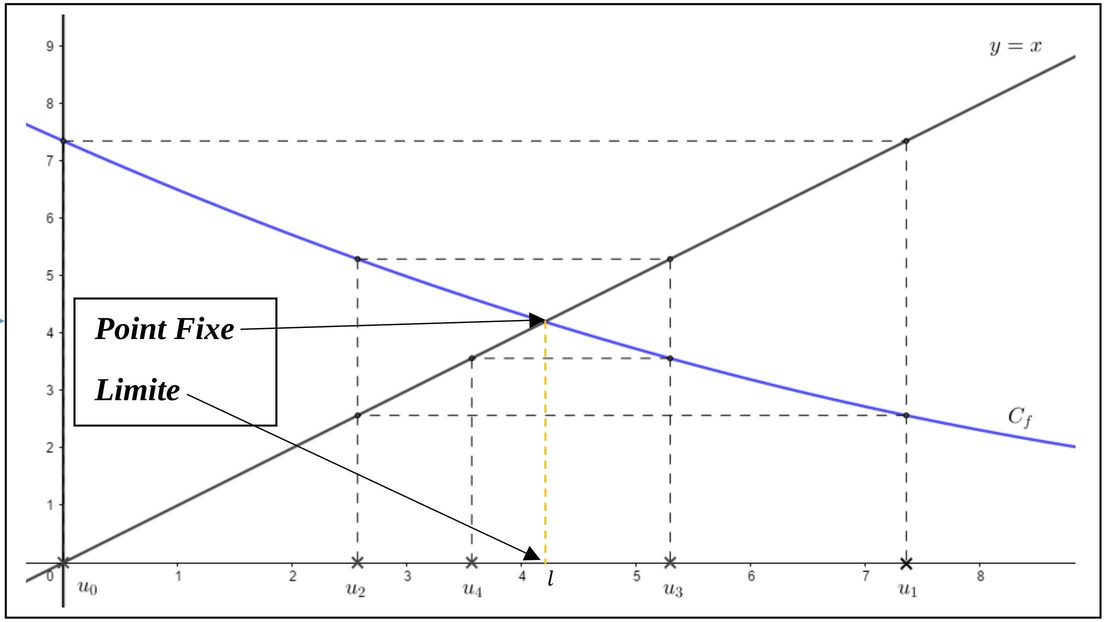
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi x - 1}{3x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi x}{3x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, et $\lim\limits_{X \to \frac{\pi}{3}} \sin X = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Donc, par composition, $\lim\limits_{x \to -\infty} \sin(\frac{\pi x - 1}{3x+1}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Théorème du point fixe :

- Si (u_n) est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$
- De plus, si (u_n) est convergente

$\Rightarrow$Alors la limite de la suite est solution de $f(x) = x$.



Lever les FI : Méthode 1 → Factorisation par le terme de plus haut degré

Exemple 1 : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{-3x^2-1}$ $\Rightarrow$ FI type « $\frac{\infty}{\infty}$ »

On factorise par x^2 au numérateur et au dénominateur :

$f(x) = \frac{2x^2-x}{-3x^2-1} = \frac{x^2\left(2-\frac{x}{x^2}\right)}{x^2\left(-3-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x}}{-3-\frac{1}{x^2}}$, Puis on passe aux limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\frac{1}{x} = 2$ car $-\frac{1}{x} \to 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} -3-\frac{1}{x^2} = -3$ car $-\frac{1}{x^2} \to 0$

Par Quotient,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-3-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3}$$

Conclusion : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2-x}{-3x^2-1} = -\frac{2}{3}$

Exemple 2 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+3x^2-x+4}{x^2+x+7}$ $\Rightarrow$ FI type $\frac{\infty}{\infty}$

On factorise par ***le plus haut degré commun***, ici, x^2

$$f(x) = \frac{-2x^3+3x^2-x+4}{x^2+x+7} = \overbrace{\frac{x^2\left(-2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)} = \frac{-2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}}^{on\ simplifie\ par\ x^2}$$

Passons aux limites, sachant que $-\frac{1}{x} \to 0$, $\frac{4}{x^2} \to 0$, $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{7}{x^2} \to 0$

Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3 = -\infty$

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2} = 1$

Par Quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}} = -\infty$

Exemple 3 : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+2x$ $\Rightarrow$ FI de type $\infty-\infty$

On factorise par x^2 dans la racine carrée :

$f(x) = \sqrt{x^2+1}+2x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2x = \overbrace{\sqrt{x^2}}\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x = \underbrace{-x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x = x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right)$, Puis on passe aux limites

$\lim\limits_{x\to-\infty} 1+\frac{1}{x^2} = 1$, donc par composition $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1} = -1$

Par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2 = -1+2 = 1$

Puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc

Par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2\right) = -\infty$

⚠ $\boldsymbol{\sqrt{x^2} \neq x}$

Rappel : $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x \ si \ x \geq 0 \\ -x \ si \ x \leq 0 \end{cases}$

Dans notre exemple, la limite s'étudie en $-\infty$, donc $|x| = -x$.

<u>Lever les FI :</u> Méthode 2 → Multiplication par la quantité conjuguée

Exemple 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ FI de type $\infty-\infty$

Quantité conjuguée de $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$: $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$

Par somme des limites $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=+\infty$

Par inverse, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0$

Exemple 2 : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ $\Rightarrow$ FI de type « $\frac{0}{0}$ »

$f(x)=\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x+3-2^2}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

On passe aux limites :

$\lim\limits_{x\to1}x+3=4$, donc par composée et par somme : $\lim\limits_{x\to1}\sqrt{x+3}+2=4$

Donc par inverse, $\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$

<u>Lever les FI :</u> Méthode 3 → Utilisation du Nombre dérivé

<u>Nombre dérivé :</u> $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple 1 : $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}$ $\Rightarrow$ FI de type « $\frac{0}{0}$ »

On fait apparaître le taux d'accroissement : $\frac{\overbrace{\sqrt{2x+2}}^{f(x)}-\overbrace{2}^{f(1)}}{x-1}$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$$

Avec $f(x)=\sqrt{\mathbf{2x+2}}$, on a $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+2}}$.

Ainsi, $f'(1)=\frac{1}{\sqrt{2\times1+2}}=\frac{1}{2}$

<u>Conclusion :</u>

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}=\frac{1}{2}$$

Exemple 2 : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ $\Rightarrow$ FI de type « $\frac{0}{0}$ »

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

Avec $f(x)=e^x$, donc $f'(x)=e^x$

Ainsi, $f'(0)=e^0=1$

<u>Conclusion :</u>

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

Lever les FI : Méthode 4 → Fonction Rationnelle type « $\frac{P(x)}{Q(x)} \to \frac{0}{0}$ »

Méthode :

$$Si \lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)} \to \frac{0}{0}$$

Alors $P(a) = Q(a) = 0$. Donc $x = a$ est une racine des 2 polynômes ⇒ On peut les factoriser par $(x - a)$.

Le quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ peut donc être simplifié par $(x - a)$.

Exemple 1 : $\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+4x-30}{x-3}$ ⇒ FI de type « $\frac{P(x)}{Q(x)} \to \frac{0}{0}$ »

$P(x) = 2x^2 + 4x - 30$ et $Q(x) = x - 3$.

Or, $\lim_{x\to 3} P(x) = P(3) = 0$ et $\lim_{x\to 3} Q(x) = Q(3) = 0$.

On en déduit : $P(3) = 0$, donc $x_1 = 3$ est une racine de P.

<u>Rappel :</u>

Produit des racines $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow 3x_2 = -\frac{30}{2} = -15 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{15}{3} = -5.$

$\Rightarrow P(x) = 2(x-3)(x+5)$; donc $\frac{2x^2+4x-30}{x-3} = \frac{2(x-3)(x+5)}{x-3} = 2(x+5)$

<u>Conclusion :</u>

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x^2+4x-30}{x-3} = \lim_{x\to 3} 2(x+5) = 16$$

Exemple 2 : $\lim_{x\to +1} \frac{x^2+6x-7}{3x^2+3x-6}$ ⇒ FI de type « $\frac{P(x)}{Q(x)} \to \frac{0}{0}$ »

$P(x) = x^2 + 6x - 7$ et $Q(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

$\lim_{x\to 1} P(x) = P(1) = 0$ et $\lim_{x\to 1} Q(x) = Q(1) = 0$.

$P(1) = Q(1) = 0$, donc $x_1 = 1$ est une racine de P *et* Q.

<u>Pour $P(x)$:</u>

$x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x_2 = \frac{c}{a} = -7$. Donc $P(x) = (x-1)(x+7)$

<u>Pour $Q(x)$:</u>

$x_2 = \frac{c}{a} = -2$. Donc $Q(x) = 3(x-1)(x+2)$.

⇒ On simplifie l'expression : $\frac{x^2+6x-7}{3x^2+3x-6} = \frac{(x-1)(x+7)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{x+7}{3(x+2)}$

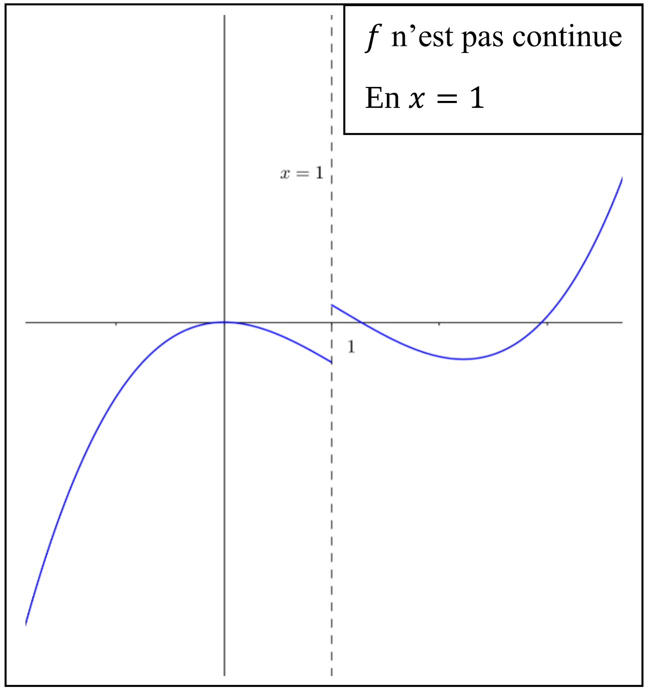
<u>Conclusion :</u>

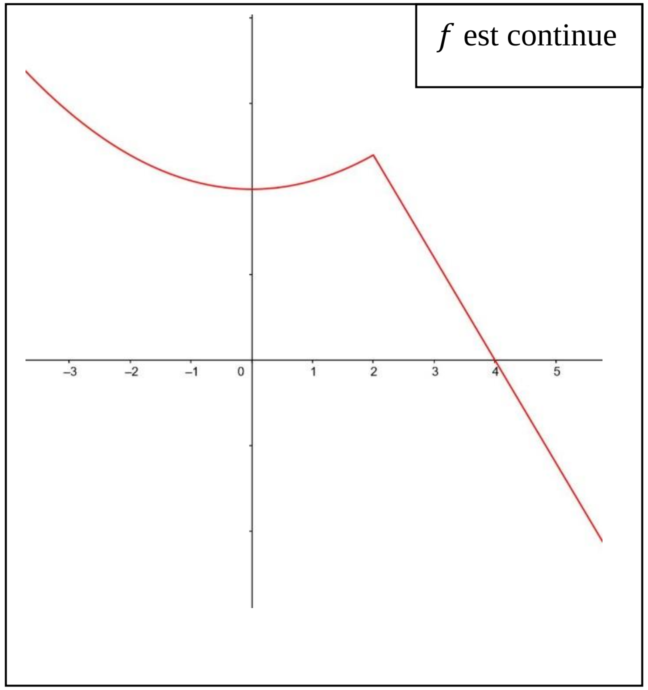
$$\lim_{x\to +1} \frac{x^2+6x-7}{3x^2+3x-6} = \lim_{x\to +1} \frac{x+7}{3(x+2)} = \frac{1+7}{3(1+2)} = \frac{8}{9}$$

CONTINUITÉ

1$^{\text{ère}}$ Approche :

La fonction f est continue sur I ssi on peut la tracer dans lever de stylo





2$^{\text{ème}}$ Approche - Définition :

f est continue en $x = a$ ssi

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Exemple : fonction définie par morceaux

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 \; si \; x \leq 2 \\ \frac{2x-1}{x-1} \; si \; x > 2 \end{cases}$$

Étude de la continuité en $x = 2$.

$u(x) = x^2 - x + 1$et $v(x) = \frac{2x-1}{x-1}$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} u(x) \; si \; x \leq 2 \\ v(x) \; si \; x > 2 \end{cases}$$

D'une part : $f(2) = u(2) = 3$

Puis, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} v(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x-1}{x-1} = 3$

<u>Conclusion :</u>

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = 3.$

Donc f est continue en $x = 2$

Théorème :

Toute fonction dérivable sur I est continue sur I.

- Polynômes : continus sur $\mathbb{R}$.
- Fonctions rationnelles : continues sur leur domaine de définition.
- Fonction $x \to \sqrt{x}$: continue sur $[0\,;+\infty[$.
- Fonctions trigonométriques $x \to \cos x$ et $x \to \sin x$: continues sur $\mathbb{R}$.

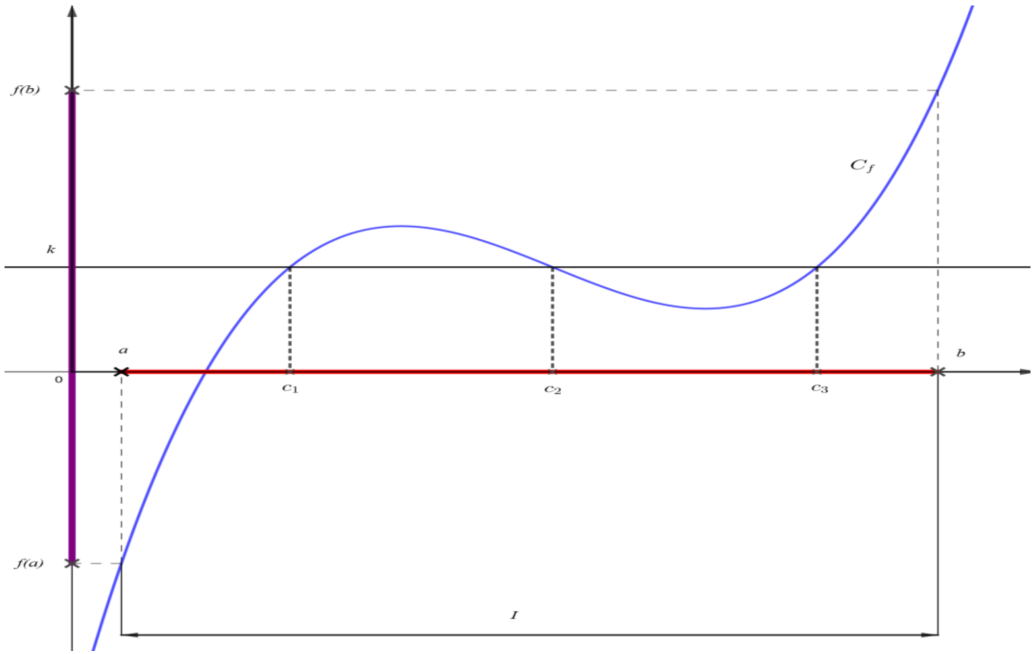
$\Rightarrow$ De façon générale, toute fonction obtenue par opération ou composition de fonctions continues est continue sur son ensemble de définition.

APPLICATION : TVI & Théorème de la Bijection

Théorème des Valeurs Intermédiaires :

f définie, continue sur $I = [a; b]$.

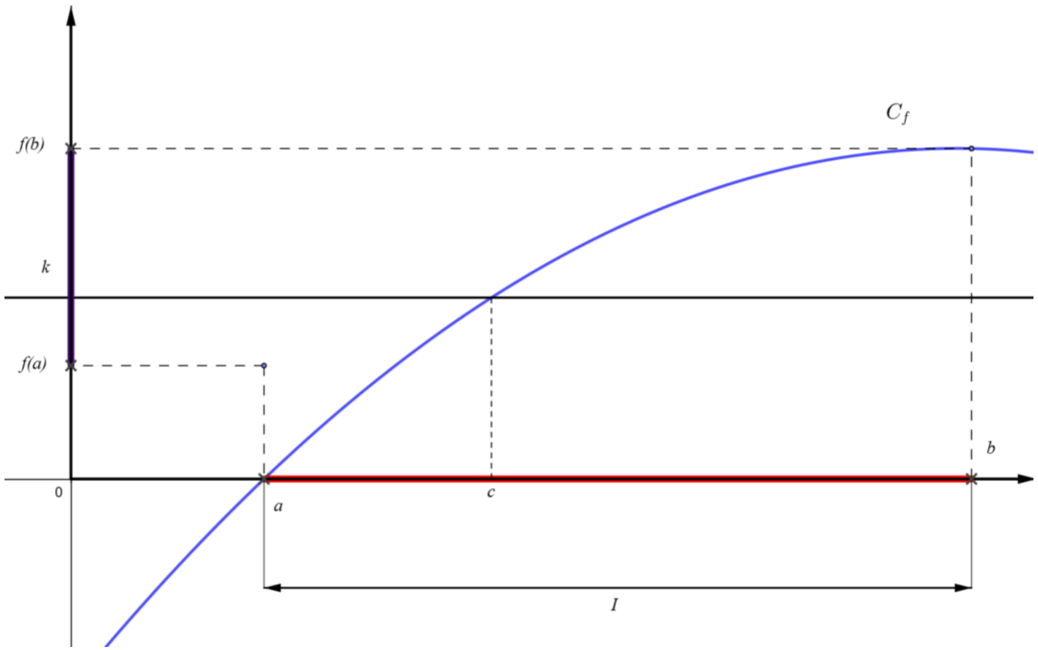
$\forall\ k \in [f(a)\ ; f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b]$.



Théorème de la Bijection :

f définie, continue, strictement monotone sur $I = [a; b]$.

$\forall\ k \in [f(a)\ ; f(b)]$, l'équation $f(x) = k$ admet exactement une solution dans $[a; b]$.



Exemple : Montrons que $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

On va étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ et montrer qu'elle s'annule une seule fois.

On démontre facilement que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 \geq 0$. On dresse alors de tableau de variations ci-contre : $\rightarrow$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	0	$+\infty$

Rédigeons le Thme de la Bijection :

f est ***continue*** (car dérivable), strictement ***croissante et monotone*** sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\infty; +\infty[$.

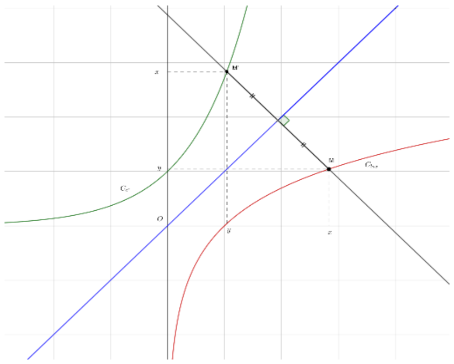
Or $\mathbf{0} \in]-\infty; +\infty[$, donc d'après le ***Théorème de la bijection***, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

La Fonction ***logarithme népérien***, notée $\ln x$ est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

→ Domaine de définition : $]0\,;\,+\infty[$

→ Domaine image : $\mathbb{R}$

Courbe :



C_{ln} et C_{exp} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$

Dérivée – Variations :

$x \to \ln x$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Donc ln est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$	
ln	$-\infty$	0	$+\infty$

Fonction Composée

$\ln u(x)$ existe ssi $u(x) > 0$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

→ $\forall x > 0, e^{\ln x} = x$

→ $\forall x \in \mathbb{R}, \ln e^{x} = x$

→ $\ln 1 = 0$ et $\ln e = 1$

Règles de Calcul :

$\forall\ a, b \in \mathbb{R}_+^*\ , n \in \mathbb{N}$:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

Equation $\ln u(x) = \ln v(x)$

$$\begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow D_E$$

On applique $x \to e^x$

On résout dans D_E $u(x) = v(x)$

Equation $a(\ln x)^2 + b \ln x + c = 0$

On pose $X = \ln x$, pour $x > 0$

On résout $aX^2 + bX + c$ et on revient au changement de variable.

Limites

Limites aux bornes :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

Croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad et \quad \lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0$$

Avec le nombre dérivé :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

TERMINALES

LIMITES DE FONCTIONS

METHODES

Anthony Cordier – CMAC

La Factorisation par le terme de plus haut degré :

⚠ Cette méthode est valable UNIQUEMENT en l'infini.

Limite d'une fonction rationnelle, faisant apparaître la FI $\frac{\infty}{\infty}$:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-x}{-3x^2-1}$:

Méthode 1 :

Nous pouvons simplement faire apparaître la domination des termes de plus haut degré. En effet, x est « négligeable » devant x^2 en l'infini.

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-x}{-3x^2-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{-3x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

Si votre professeur accepte cette méthode, elle sera largement à privilégier par rapport à la 2ème façon que nous allons aborder.

Nous venons de montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-x}{-3x^2-1} = -\frac{2}{3}$, donc la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}$ est une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction $x \to \frac{2x^2-x}{-3x^2-1}$ en $-\infty$.

Méthode 2 :

Factorisons par le terme de plus haut degré et modifions l'écriture de la fonction.

$$\frac{2x^2-x}{-3x^2-1} = \frac{x^2\left(2-\frac{x}{x^2}\right)}{x^2\left(-3-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2-\frac{1}{x}}{-3-\frac{1}{x^2}}$$

Pensez systématique à simplifier vos facteurs, sinon, la FI $\frac{\infty}{\infty}$ sera toujours présente.

Passons à la limite :

$$\left.\begin{array}{l} .\ \lim\limits_{x \to -\infty} 2-\frac{1}{x} = 2 \text{ car } -\frac{1}{x} \to 0 \\ .\ \lim\limits_{x \to -\infty} -3-\frac{1}{x^2} = -3 \text{ car } -\frac{1}{x^2} \to 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Par Quotient,} \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-3-\frac{1}{x^2}} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Nous venons donc de montrer, avec un peu plus d'étapes, que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2-x}{-3x^2-1} = -\frac{2}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+3x^2-x+4}{x^2+x+7}$:

Abordons cette limite, de type $\frac{\infty}{\infty}$, avec la méthode 2.

Nous pouvons aussi bien factoriser par x^3 au numérateur, x^2 au dénominateur, que par le plus haut degré commun, c'est-à-dire x^2 au numérateur et dénominateur. Je vous propose le 2ème point de vue qui fait preuve « d'un peu plus de finesse ».

$$\frac{-2x^3+3x^2-x+4}{x^2+x+7} = \frac{x^2\left(-2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{-2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

On simplifie par x^2

Passons aux limites, sachant que $-\frac{1}{x}\to 0$, $\frac{4}{x^2}\to 0$, $\frac{1}{x}\to 0$ et $\frac{7}{x^2}\to 0$

Puis, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3 = -\infty$

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} -2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2} = 1$

Par Quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x+3-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{7}{x^2}} = -\infty$

Si nous avions utilisé la 1ère méthode, nous aurions abouti beaucoup plus vite, mais si votre enseignant utilise cette méthode complète, vous devrez vous y plier !

La Méthode 1 donne :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+3x^2-x+4}{x^2+x+7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} -2x = -\infty$$

c. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1}+2x$: de type $\infty-\infty$

On commence d'abord par factoriser par x^2 dans la racine carrée.

$$\sqrt{x^2+1}+2x = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+2x = \sqrt{x^2}\times\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+2x$$

Faisons un point autour de $\sqrt{x^2}$:

⚠$\sqrt{x^2} \neq x$

En effet, $\sqrt{(-3)^2} = 3$ et non -3

Cette écriture doit vous rappeler le chapitre sur la valeur absolue ! En effet, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Rappelons que $|x| = \begin{cases} x \; si \; x \geq 0 \\ -x \; si \; x \leq 0 \end{cases}$

Dans notre exemple, la limite s'étudie en $-\infty$, donc $|x| = -x$.

Ainsi,

$$\sqrt{x^2+1} + 2x = -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2x$$

$$= x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2\right)$$

On factorise par x

Passons aux limites :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$, ainsi, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = -\sqrt{1} = -1$

Par somme des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2 = -1 + 2 = 1$

Puis, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$

Par produit des limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2\right) = -\infty$.

La multiplication par la quantité conjuguée :

a. un classique : $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Remarque : la factorisation par x dans la racine carrée, puis par $\sqrt{x}$ *n'aboutira malheureusement pas et mènera vers une nouvelle forme indéterminée de type* $\infty \times 0$. *N'hésitez pas à le faire pour vous en convaincre…*

La quantité conjuguée de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ est $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Nous allons donc multiplier par cette quantité conjuguée au numérateur et au dénominateur.

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

Passons aux limites :

$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Donc par somme des limites $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty$

Ainsi, par inverse, $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.

b. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$: Fait intervenir la FI de type $\frac{0}{0}$

En effet, $\lim_{x \to 1} \sqrt{x+3} - 2 = 2 - 2 = 0$ et $\lim_{x \to 1} x - 1 = 0$

Levons cette FI à l'aide de la quantité conjuguée :

$$\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{x+3-2^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

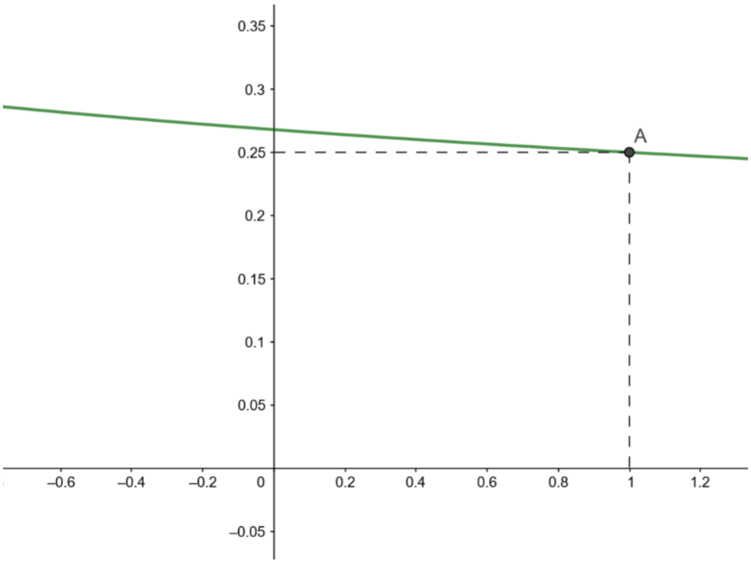
$$= \frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

Passons maintenant aux limites :

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x+3} + 2 = 4$$

Donc par inverse, $\lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$

Illustration :



Nous avons tracé la fonction étudiée sur une fenêtre adaptée afin de faire apparaitre la courbe en $x = 1$.

Le graphique ne fait pas figurer la valeur interdite mais nous pouvons bien voir la valeur $\frac{1}{4}$.

Utilisation du nombre dérivé :

Rappel :

Le nombre dérivé d'une fonction f en $x = a$, noté $f'(a)$, est donné par :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Le nombre dérivé étant défini à partir d'une limite, il n'est donc pas surprenant de penser à utiliser cette formule pour calculer des limites.

Généralement, cette méthode intervient dans certains cas de formes indéterminées de type « $\frac{0}{0}$ ». Il s'agit de reconnaître, dans l'expression dont nous cherchons la limite, le taux d'accroissement d'une fonction f judicieusement choisie.

Exemples :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \qquad ; \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+2} - 2}{x - 1} \qquad ; \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Réponse :

Dans chacun des cas, il s'agit de faire apparaître un quotient de la forme $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, c'est-à-dire le taux d'accroissement, afin d'appliquer la limite, donc le nombre dérivé.

<u>1ère exemple :</u>

$x \to \frac{\sin x}{x}$, définie pour tout réel x non nul.

La limite à étudier est en $x = 0$, avec $f(x) = \sin x$, on a $f(a) = f(0) = \sin 0 = 0$. Ainsi,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Revenons à la limite : $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$

D'autre part, $f'(x) = (\sin x)' = \cos x$, donc $f'(0) = \cos 0 = 1$

En conclusion,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

2ème exemple :

$x \to \frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1}$, définie pour tout réel $x \neq 1$, peut s'écrire sous la forme d'un taux d'accroissement avec $f(x) = \sqrt{2x+2}$.

La limite étant en $x = 1$, on a $f(1) = \sqrt{2 \times 1 + 2} = 2$.

Tous les éléments sont réunis pour appliquer la méthode.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$$

Calculons la dérivée de f : $f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2x+2}}$.

Ainsi, $f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2\times1+2}} = \frac{1}{2}$

Finalement,

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{2x+2}-2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

3ème exemple :

Cet exemple constitue le dernier complément à apporter sur les limites de la fonction exponentielle.

$x \to \frac{e^x-1}{x}$, définie pour tout réel non nul, s'écrit sous la forme du taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ avec $f(x) = e^x$ et $a = 0$.

En effet, si $f(x) = e^x$, alors $f(0) = e^0 = 1$.

Nous avons alors,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

Or, $f'(x) = (e^x)' = e^x$, donc $f'(0) = e^0 = 1$

Ainsi,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

Remarque :

Chacun de ces résultats ne correspond en fait qu'au coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en $x = a$…

Limites par composition :

Nous allons ici amener la méthode afin de déterminer la limite des fonctions pouvant s'écrire sous la forme $f(g(x))$.

Soit f, g, 2 fonctions définies respectivement sur $I = g(J)$ et J, $a \in J$, $b \in I$ et c un nombre réel (a, b, c peuvent éventuellement être égaux à $\pm\infty$).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } \lim\limits_{x\to a} g(x) = b \\ \text{Et } \lim\limits_{X\to b} f(X) = c \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Alors,} \\ \lim\limits_{x\to a} f\big(g(x)\big) = c \end{array}$$

Exemples :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{2}{x^2-1}} \quad ; \lim_{x\to +\infty} e^{-x^2+1} \quad ; \lim_{x\to -\infty} \sin(\frac{\pi x-1}{3x+1})$$

Réponse :

Dans chacun des cas, il faut commencer par identifier la composition mise en jeu dans la limite demandée.

- $x \to \sqrt{\frac{2}{x^2-1}}$ est le composée de $x \to \frac{2}{x^2-1}$, dans la fonction racine carrée $x \to \sqrt{x}$.

Passons à la limite :

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{x^2-1}$:

En dressant le tableau de signes de $x \to x^2 - 1$, il est clair que $\lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0^+$

De plus, $\lim\limits_{x\to 1^+} 2 = 2$.

Donc par quotient, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{x^2-1} = +\infty$

Puis, $\lim\limits_{X\to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$. Donc Par composition, $\lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{2}{x^2-1}} = +\infty$

Remarque :

Nous pourrions dire ici, que la droite d'équations $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe représentative de la fonctions $x \to \sqrt{\frac{2}{x^2-1}}$.

- $x \to e^{-x^2+1}$ est la composée de la fonction $x \to -x^2 + 1$, dans la fonction exponentielle $x \to e^x$.

Passons à la limite :

$\lim\limits_{x\to+\infty} -x^2 + 1 = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^X = 0$.

Donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2+1} = 0$.

Remarque :

Nous pourrons remarquer ici, que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale en $+\infty$ pour la courbe représentative de la fonctions $x \to e^{-x^2+1}$.

- $x \to \sin(\frac{\pi x-1}{3x+1})$ est la composée de $x \to \frac{\pi x-1}{3x+1}$, dans la fonction sinus $x \to \sin x$.

Passons à la limite :

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi x-1}{3x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi x}{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, et $\lim\limits_{X\to\frac{\pi}{3}} \sin X = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sin(\frac{\pi x-1}{3x+1}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Remarque :

On pourrait dire ici que la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ est une asymptote horizontale en $-\infty$ pour la courbe représentative de la fonctions $x \to \sin(\frac{\pi x-1}{3x+1})$.

Limite de fonctions rationnelles type « $\frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{Q(x)}} \rightarrow \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$ » :

Nous allons aborder ici les limite des fonctions rationnelles qui aboutirons à la forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ ».

Principe de la méthode :

On définit P et Q, 2 polynômes tels que $P(a) = Q(a) = 0$.

En utilisant le cours de 1ère sur les polynômes, nous savons que :

Si $P(a) = 0$, alors on peut factoriser P par $(x - a)$

Si $Q(a) = 0$, alors on peut factoriser Q par $(x - a)$

Ainsi, le quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ peut être simplifié par le facteur commun $(x - a)$.

Exemples :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + 4x - 30}{x - 3} \text{ et } \lim_{x \to +1} \frac{x^2 + 6x - 7}{3x^2 + 3x - 6}$$

Réponse :

- $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2+4x-30}{x-3}$:

Cette limite fait intervenir la fonction rationnelle $f(x) = \frac{2x^2+4x-30}{x-3}$, de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = 2x^2 + 4x - 30$ et $Q(x) = x - 3$.

Or, $\lim\limits_{x \to 3} P(x) = P(3) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 3} Q(x) = Q(3) = 0$.

Nous avons donc bien une forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ ».

Ici, il suffit de factoriser P car Q est de degré 1, donc déjà « prêt ».

$P(3) = 0$, donc $x_1 = 3$ est une racine de P.

Or, on rappelle que le produit des racines $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Donc $3x_2 = -\frac{30}{2} = -15 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{15}{3} = -5$

Ainsi, la forme factorisée de P est : $P(x) = 2(x - 3)(x + 5)$.

Nous pouvons alors réécrire la fonction f :

$$f(x) = \frac{2(x-3)(x+5)}{x-3} = 2(x+5)$$

Finalement,

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 + 4x - 30}{x - 3} = \lim_{x \to 3} 2(x+5) = 16$$

Remarque :

Il aurait été possible ici d'utiliser la méthode de la limite par le nombre dérivée :

$u'(a) = \lim_{x \to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a}$ avec $u(x) = 2x^2 + 4x$ et $a = 3$

- $\lim_{x \to +1} \frac{x^2+6x-7}{3x^2+3x-6}$:

Cette limite fait intervenir la fonction rationnelle $f(x) = \frac{x^2+6x-7}{3x^2+3x-6}$, de la forme $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $P(x) = x^2 + 6x - 7$ et $Q(x) = 3x^2 + 3x - 6$.

Or, $\lim_{x \to 1} P(x) = P(1) = 0$ et $\lim_{x \to 1} Q(x) = Q(1) = 0$.

Nous avons donc bien une forme indéterminée de type « $\frac{0}{0}$ ».

Ici, $P(1) = Q(1) = 0$, donc $x_1 = 1$ est une racine de $P \; et \; Q$.

Utilisons à nouveau le produit des racines $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ avec $x_1 = 1$, donc $x_2 = \frac{c}{a}$.

Pour le polynôme P, on a $x_2 = \frac{-7}{1} = -7$

Puis pour Q, on a $x_2 = -\frac{6}{3} = -2$.

Ainsi, les formes factorisées sont $P(x) = (x-1)(x+7)$ et $Q(x) = 3(x-1)(x+2)$.

Nous pouvons alors simplifier f : $f(x) = \frac{x^2+6x-7}{3x^2+3x-6} = \frac{(x-1)(x+7)}{3(x-1)(x+2)} = \frac{x+7}{3(x+2)}$

Revenons à présent à la limite :

$$\lim_{x \to +1} \frac{x^2 + 6x - 7}{3x^2 + 3x - 6} = \lim_{x \to +1} \frac{x+7}{3(x+2)} = \frac{1+7}{3(1+2)} = \frac{8}{9}$$