LE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

Principe :

Soit (P_n), une propriété définie $\forall n \geq n_0$.

Initialisation : Si P_{n_0} est vraie (on le vérifie).

Hérédité : Si, pour $k \geq n_0$ fixé, « P_k est vraie » (Hypothèse de Récurrence) implique « P_{k+1} est vraie ».

Alors, on peut conclure que $\forall n \geq n_0$, (P_n) est vraie.

Hérédité Type 1 :

Si on veut montrer une inégalité, par exemple :

- $u_n > 0$
- $u_{n+1} > u_n$
- $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha \ldots$

Méthode :

- On part de l'hypothèse de récurrence
- On recompose pour arriver au rang suivant ($n+1$ en général)
- On conclue

Hérédité Type 2 :

Si on veut montrer une inégalité, égalité pour une suite définie par récurrence, par $u_{n+1} = f(u_n)$:

En général, la fonction a été étudiée (surtout pour démontrer une inégalité)

Méthode :

- On part de l'hypothèse de récurrence
- On applique la fonction pour passer au rang suivant ($n+1$ en général)
- On conclue

Hérédité Type 3 :

Si on veut montrer une égalité :

- L'écriture explicite d'une suite
- L'expression d'une somme
- Une divisibilité …

Méthode :

- On part du rang $n+1$ (⚠ n'utilise jamais le but !!!)
- On fait apparaître le rang n
- On utilise l'hypothèse de récurrence
- On conclue

⚠ Cas particulier de certaines inégalités

Si une suite est définie par récurrence de la forme :

$$\underbrace{u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 3}}_{\text{des } u_n \text{ au numérateur et au dénominateur}} \quad \text{ou} \quad \underbrace{u_{n+1} = au_n^2 + bu_n + c}_{\text{des } u_n \text{ avec plusieurs puissances}} \quad \text{ou} \quad u_{n+1} = \underbrace{\sqrt{u_n + 3} + 2u_n}_{\text{des } u_n \text{ dans la racine et hors de la racine}} \ldots$$

Il sera compliqué de recomposer pour montrer $u_{n+1} > u_n$, ou $u_n > a$.

Dans ce cas, on part du rang $n+1$ $u_{n+2} - u_{n+1}$ ou $u_{n+1} - a$ et on étudie le signe

Limite d'une Suite Numérique
Méthodes & Théorèmes

Les 4 Formes Indéterminées

$$" \quad \infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0} \quad "$$

Définitions

- (u_n) CONVERGE $\Leftrightarrow$ (u_n) tend vers une limite finie.
- (u_n) DIVERGE $\Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty \\ ou \\ (u_n)\ n'a\ pas\ de\ limite \end{cases}$

Limite de q^n

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } q > 1 \\ 0 \text{ si } -1 < q < 1 \\ \text{Pas de limite si } q \leq -1 \end{cases}$$

Limites usuelles

Ecriture explicite de (u_n)	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
$an + b\ (a > 0)$	$+\infty$
$an + b\ (a < 0)$	$-\infty$
n^2	$+\infty$
n^3	$+\infty$
n^α (où α est un entier pair)	$+\infty$
n^α (où α est un entier impair)	$+\infty$
$\frac{1}{n}$	0
$\frac{1}{n^2}$	0
$\frac{1}{n^\alpha}$ (où $\alpha > 0$)	0
$\sqrt{n}$	$+\infty$
e^n	$+\infty$

Limite d'une Suite Numérique

Méthodes & Théorèmes

Les Théorèmes

1. Théorèmes de comparaison et d'encadrement :

$(u_n), (v_n), (w_n)$, 3 suites définies à partir d'un certain rang.

Théorèmes de comparaison :

- *Si, $\forall n \geq p$, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.*
- *Si, $\forall n \geq p$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.*

Théorème d'encadrement (Théorème des gendarmes) :

- *Si, $\forall n \geq p$, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$*

2. Théorème de Diverge – Convergence monotone :

Divergence : *Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$*

Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$

T^{hme} de la Convergence monotone :

- *Toute suite croissante majorée converge*
- *Toute suite décroissante minorée converge*

3. Théorème du point fixe :

Si une suite est définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors si (u_n) converge, elle ne peut tendre que vers un nombre l solution de $f(x) = x$.

Les Méthodes

1. Factorisation par le terme de plus haut degré :

$\underbrace{n^2 - 5n + 2}_{FI:\ \infty-\infty} = n^2\left(1 - \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}\right)$ Permet de conclure par produit « $\infty \times 1 \to \infty$ »

2. Multiplication par la quantité conjuguée :

$\underbrace{\sqrt{4n^2+1} - 2n}_{FI:\ \infty-\infty} = \frac{(\sqrt{4n^2+1}-2n)(\sqrt{4n^2+1}+2n)}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = \frac{4n^2+1-4n^2}{\sqrt{4n^2+1}+2n} = \frac{1}{\sqrt{4n^2+1}+2n}$ Permet de conclure par quotient « $\frac{1}{\infty} \to 0$ ».

3. Limite par composition :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v(n) = b$ et $\lim\limits_{N\to b} u(N) = c$ alors $\lim\limits_{n\to\infty} u(v(n)) = c$